ANÁLISIS II: EXAMEN FINAL

Sólo hay que resolver 8 de los 9 ejercicios.

(**Desarrrolla primero los que consideres más accesibles.**)

Duración: 3:15 hrs.

Al considerar un intervalo $[a, b]$ entenderemos que $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$.

1. Sea V un espacio vectorial. Si $K \subseteq V$ es un conjunto convexo, prueba que su cerradura $\overline{K}$ también lo es.

2. Prueba que el conjunto $A := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\| \leq 1\}$ es arco-conexo.

3. Prueba que $\ln(1 + x) < x, \forall\, x > 0$.

4. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n^3}$. Prueba:

i) f está bien definida.

ii) f es derivable.

5. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función monótona-creciente. Prueba:

i) $\{f^n(x)\}$ converge, $\forall\, x \in [a, b]$.

ii) Si f es continua, entonces $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ es un punto fijo de f, $\forall\, x \in [a, b]$.

6. Sea $K : [a, b]^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y para cada $f \in R([a, b])$ definamos $Tf(x) := \int_a^b K(x, y)f(y)dy$. Prueba:

i) $Tf \in C([a, b])$.

ii) $\{Tf : f \in R([a, b]), \|f\|_\infty \leq 1\}$ es una familia equicontinua.

7. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Prueba:

i) A es rectificable.

ii) Calcula $\int_A (x + y^2)dxdy$.

8. Sea $A \in \mathcal{M}(2)$. Prueba que $\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_2$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x - y + 1, x + z - 2, y - 2z + 3)$. Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es derivable, $g(0) = (-1, 0, 1)$ y $Dg(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, encuentra $D(f \circ g)(0)$.

Viernes 18 de junio, 2021